Mathematische Annalen.

Unter Mitwirkung
von
P. Gordan, C. Neumann, M. Noether, K. VonderMühll und H. Weber
gegenwärtig herausgegeben
von
F. Klein, W. Dyck und A. Mayer.

Leipzig bei B. G. Teubner.

Sonderabdruck aus dem 48. Bande.
[1896]

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1895. 1896.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. VII. Heft. A. u. d. T.: Supplement zum 40. Jahrgang der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Herausgegeben von Dr. O. Schlömilch und Dr. M. Cantor. Mit einer lithogr. Tafel u. 16 Figuren im Text. [III u. 244 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 7.60.

Bianchi, Luigi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von Max Lukat, Oberlehrer in Hamburg. 2 Lieferungen. I. Lieferung. [336 S.] gr. 8. 1896. geh.

Biermann, Dr. **Otto,** o. ö. Professor an der Technischen Hochschule zu Brünn, Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialrechnung, Algebra und Funktionentheorie. [XII u. 382 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 10.—

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 3 Bände. III. (Schlufs-)Band. 3 Abt. II. Abt. Die Zeit von 1700 bis 1726. Mit 30 Fig. im Text. [472 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 6.—

Cranz, Prof. Dr. **Carl,** Lehrer für Physik an der Kgl. Oberrealschule und Dozent an der Kgl. Technischen Hochschule in Stuttgart, Compendium der theoretischen äusseren Ballistik. Zum Gebrauch von Lehrern der Mechanik und Physik an Hochschulen; von Artillerieofficieren; Instructoren an Schiessschulen, Artillerieschulen und Kriegsacademien; Mitgliedern von Artillerie- und Gewehr-Prüfungscommissionen; Gewehrtechnikern. Mit 110 Figuren im Text. [XII u. 511 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 20.—

Eberhard, Dr. **V.,** Professor a. d. Universität zu Königsberg i. P., die Grundgebilde der ebenen Geometrie. In 2 Bänden. I. Band. Mit 5 Figurentafeln. [XLVIII u. 302 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 14.—

Fiorini, Matteo, Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion. Nach dem Italienischen frei bearbeitet von S. Günther. Mit 9 Textfig. [V u. 137 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 4.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren: Jakob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. In 3 Bänden. I. Band. II. Theil: die Ausdehnungslehre von 1862. Mit 37 Figuren im Text. [VIII u. 511 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 16.—

Gundelfinger, Dr. **Sigmund,** Prof. an der technischen Hochschule zu Darmstadt, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von Dr. Friedrich Dingeldey, Privatdocent ebendaselbst. Mit in den Text gedruckten Figuren und einem Anhange, enthaltend Aufgaben und weitere Ausführungen. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 12.—

Hrabák, Josef, k. k. Oberbergrath u. Prof., practische Hilfstabellen für logarithmische und andere Zahlenrechnungen. Dritte, abgekürzte Ausg. [V u. 253 S.] gr. 8. 1895. geb. n. ℳ 3.—

Huebner, Dr. **L.,** Prof. am Gymn. zu Schweidnitz, ebene und räumliche Geometrie des Mafses in organischer Verbindung mit der Lehre von den Kreis- u. Hyperbelfunktionen neu dargestellt. 2., wohlfeile Ausgabe. [XVI u. 340 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 4.—

Klein, F., Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Ausgearbeitet von F. Tägert. Mit 10 in den Text gedr. Fig. u. 2 lith. Tafeln. [V u. 66 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 2.—

Koenigsberger, Dr. **Leo,** Professor der Mathematik an der Universität zu Heidelberg, Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. Mit einem Bildnis Hermann von Helmholtz's von Franz von Lenbach vom 30. April 1894. [IV u. 58 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 2.40.

Kohlrausch, Dr. **F.,** Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg, Leitfaden der praktischen Physik mit einem Anhange das absolute Mafs-System. 8. vermehrte Aufl. [XVI u. 492 S. m. zahlr. Textfig.] gr. 8. 1896. Biegs. in Lwd. geb. n. ℳ 7.—

Ueber Gruppen, deren sämmtliche Theiler Normaltheiler sind.

Von

R. Dedekind in Braunschweig.

Die vorliegende Untersuchung, welche ich in den ersten Herbstwochen des Jahres 1895 begonnen und beendet habe, ist durch die Frage nach allen denjenigen endlichen Zahlenkörpern veranlasst, deren sämmtliche Divisoren Normalkörper sind. Ist R die Gruppe aller Permutationen φ eines Normalkörpers Ω, so gehört bekanntlich zu jeder Gruppe S, welche ein Theiler von R ist, ein bestimmter Körper Ω', nämlich der Inbegriff aller derjenigen Zahlen in Ω, welche durch jede Permutation der Gruppe S in sich selbst übergehen, und umgekehrt gehört jeder Divisor von Ω, d. h. jeder in Ω enthaltene Körper Ω' zu einer bestimmten in R als Theiler enthaltenen Gruppe S; die Bedingung aber, dass Ω' wieder ein Normalkörper ist, besteht darin, dass S ein *Normaltheiler**) von R, also immer

$$(1) \qquad \varphi^{-1} S \varphi = S, \qquad S\varphi = \varphi S$$

ist, wo φ jedes beliebige Element der Gruppe R bedeutet. Der auf die Gruppentheorie bezügliche Theil der obigen Frage kommt daher auf die Aufgabe zurück, die allgemeinste Form einer Gruppe R zu finden, deren sämmtliche Theiler S Normaltheiler von R sind.

Zu diesen Gruppen R gehören offenbar alle *Abel'schen*, d. h. diejenigen Gruppen, deren Elemente sämmtlich mit einander permutabel sind; ihr Bau darf als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden, und es handelt sich daher nur noch um die Form der nicht Abel'schen

*) Diese Benennung, welche H. Weber in seinem *Lehrbuch der Algebra* (Bd. I, 1895, S. 511) eingeführt hat, scheint mir aus mehreren Gründen zweckmässiger, als die sonst gebräuchlichen eines *ausgezeichneten* oder *invarianten* oder *eigentlichen* Theilers, welche letztere Bezeichnung ich in meinen Göttinger Vorlesungen (1857—1858) im Anschluss an eine Ausdrucksweise von Galois benutzt habe. Sind R, S irgend zwei verwandte, d. h. solche Gruppen, die ein gemeinsames Multiplum besitzen, und bedeutet φ jedes Element von R, so empfiehlt es sich aus algebraischen Gründen, den grössten gemeinsamen Theiler aller Gruppen $\varphi^{-1}S\varphi$ die *Norm* von S in Bezug auf R zu nennen.

Gruppen R, welche ich im Folgenden *Hamilton'sche* Gruppen nennen werde. Die einfachste oder kleinste solche Gruppe R ist nämlich diejenige Gruppe achten Grades, welche sechs verschiedene Elemente vierten Grades enthält und welche wegen ihrer innigen Beziehungen zu Hamilton's berühmter Zahlenschöpfung die *Quaterniongruppe* Q heissen mag. Sodann ergiebt sich das durch seine enge Umgrenzung überraschende Resultat, dass die allgemeinste Hamilton'sche Gruppe die Form

$$R = PQ \tag{2}$$

besitzt, wo P die Abel'sche Gruppe aller derjenigen Elemente in R bedeutet, welche mit jedem Element von R permutabel sind; diese Gruppe P unterliegt nur den beiden Bedingungen, dass sie kein einziges Element vierten Grades, wohl aber das in der Quaterniongruppe Q befindliche Element zweiten Grades enthält.

§ 1.

Die Quaterniongruppe Q.

Man kann dieselbe (wie in der Einleitung) als *Gruppe achten Grades* definiren, *welche sechs verschiedene Elemente vierten Grades enthält;* die letzteren bilden offenbar drei Paare von je zwei reciproken Elementen und mögen mit $\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}, \gamma, \gamma^{-1}$ bezeichnet werden; ausser dem Hauptelemente 1 muss Q endlich noch ein Element ε vom zweiten Grade enthalten. Es ist also

$$\varepsilon^2 = 1, \tag{3}$$

$$\alpha^2 = \alpha^{-2} = \beta^2 = \beta^{-2} = \gamma^2 = \gamma^{-2} = \varepsilon, \tag{4}$$

$$\varepsilon\alpha = \alpha\varepsilon = \alpha^{-1}, \quad \varepsilon\beta = \beta\varepsilon = \beta^{-1}, \quad \varepsilon\gamma = \gamma\varepsilon = \gamma^{-1}, \tag{5}$$

$$\varepsilon\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\varepsilon = \alpha, \quad \varepsilon\beta^{-1} = \beta^{-1}\varepsilon = \beta, \quad \varepsilon\gamma^{-1} = \gamma^{-1}\varepsilon = \gamma. \tag{6}$$

Da nun das Product $\beta\gamma$ keine Potenz von β oder γ sein kann (weil sonst $\gamma = \beta^{\pm 1}$ wäre), so muss es mit einem der beiden übrigen Elemente $\alpha^{\pm 1}$ identisch sein. Offenbar dürfen wir die Bezeichnung der Elemente von Q so *wählen*, dass $\beta\gamma = \alpha$ wird; da hieraus $\beta\gamma\alpha = \alpha^2 = \beta^2$ und $\alpha\beta\gamma = \alpha^2 = \gamma^2$ folgt, so ergiebt sich

$$\beta\gamma = \alpha, \quad \gamma\alpha = \beta, \quad \alpha\beta = \gamma. \tag{7}$$

Aus $(\beta\gamma)(\gamma\beta) = \beta(\gamma^2)\beta = \beta(\beta^2)\beta = \beta^4 = 1$ folgt ferner, dass $\beta\gamma$ und $\gamma\beta$ reciproke Elemente sind; aus (7) ergiebt sich daher

$$\gamma\beta = \alpha^{-1}, \quad \alpha\gamma = \beta^{-1}, \quad \beta\alpha = \gamma^{-1}. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgen auch die Producte der reciproken Elemente

$$\gamma^{-1}\beta^{-1} = \alpha^{-1}, \quad \alpha^{-1}\gamma^{-1} = \beta^{-1}, \quad \beta^{-1}\alpha^{-1} = \gamma^{-1}, \tag{9}$$

$$\beta^{-1}\gamma^{-1} = \alpha, \quad \gamma^{-1}\alpha^{-1} = \beta, \quad \alpha^{-1}\beta^{-1} = \gamma. \tag{10}$$

Da ferner

(11) $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \beta\beta^{-1} = \beta^{-1}\beta = \gamma\gamma^{-1} = \gamma^{-1}\gamma = 1,$

so ergeben sich aus den vorhergehenden Gleichungen auch die Producte

(12) $\gamma\beta^{-1} = \gamma^{-1}\beta = \alpha, \quad \beta\gamma^{-1} = \beta^{-1}\gamma = \alpha^{-1},$

(13) $\alpha\gamma^{-1} = \alpha^{-1}\gamma = \beta, \quad \gamma\alpha^{-1} = \gamma^{-1}\alpha = \beta^{-1},$

(14) $\beta\alpha^{-1} = \beta^{-1}\alpha = \gamma, \quad \alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1}\beta = \gamma^{-1}.$

Die Compositionstabelle der Quaterniongruppe ist daher die folgende:

	1	ε	α^{-1}	α	β^{-1}	β	γ^{-1}	γ
1	1	ε	α^{-1}	α	β^{-1}	β	γ^{-1}	γ
ε	ε	1	α	α^{-1}	β	β^{-1}	γ	γ^{-1}
α	α	α^{-1}	1	ε	γ^{-1}	γ	β	β^{-1}
α^{-1}	α^{-1}	α	ε	1	γ	γ^{-1}	β^{-1}	β
β	β	β^{-1}	γ	γ^{-1}	1	ε	α^{-1}	α
β^{-1}	β^{-1}	β	γ^{-1}	γ	ε	1	α	α^{-1}
γ	γ	γ^{-1}	β^{-1}	β	α	α^{-1}	1	ε
γ^{-1}	γ^{-1}	γ	β	β^{-1}	α^{-1}	α	ε	1

wo das durch die Zeile φ und Spalte ψ bestimmte Feld das Product $\varphi\psi$ enthält. —

Statt von der obigen Definition der Quaterniongruppe Q kann man auch von der folgenden ausgehen: *die Gruppe Q wird durch zwei nicht permutabele Elemente α, β erzeugt, welche den Bedingungen*

(15) $\beta\alpha\beta = \alpha, \quad \alpha\beta\alpha = \beta$

genügen. Führt man nämlich das dritte Element $\gamma = \alpha\beta$ ein, so nehmen diese Bedingungen die Form (7) an, woraus alle anderen Relationen leicht folgen. Durch Multiplication der ersten Gleichung (7) mit α ergiebt sich zunächst $\alpha^2 = \beta\gamma\alpha = \alpha\beta\gamma$; mit Rücksicht auf die zweite und dritte Gleichung (7) kann man daher das vierte Element ε durch

$$\varepsilon = \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2$$

einführen, welches folglich mit α, β, γ permutabel ist; die aus (7) folgende Gleichung

$$(\beta\gamma)(\gamma\alpha)(\alpha\beta) = \alpha\beta\gamma$$

ist daher identisch mit $\varepsilon^3 = \varepsilon$, also mit (3), und hieraus folgen offenbar die übrigen Gleichungen, also alle Compositionen der Tabelle. Da wir ferner angenommen haben, dass die beiden erzeugenden Elemente α, β nicht permutabel sind, so ist $\gamma = \alpha\beta$ verschieden von $\gamma^{-1} = \beta\alpha$, mithin $\varepsilon = \gamma^2$ verschieden von 1, d. h. ε ist vom zweiten, und $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}$ sind vom vierten Grade; man überzeugt sich auch leicht, dass alle diese Elemente von einander verschieden sind. —

Mag man aber von der einen oder der anderen Definition ausgehen und so zu der obigen Tabelle gelangen, so ist hiermit die *Existenz* der Gruppe Q noch nicht vollständig erwiesen; es muss bekanntlich noch gezeigt werden, dass sowohl aus $\varphi\psi = \varphi\chi$, wie aus $\psi\varphi = \chi\varphi$ immer $\psi = \chi$ folgt, und dass ausserdem das Associationsgesetz $(\varphi\psi)\chi = \varphi(\psi\chi)$ gilt. Die erstere Eigenschaft ergiebt sich zwar leicht aus dem Anblick der Tabelle, welche in jeder Zeile, wie in jeder Spalte lauter verschiedene Elemente enthält; aber die Verification des Associationsgesetzes, wenn sie sich auch auf manche Art abkürzen lässt, würde doch schon ziemlich lästig sein. In solchen Fällen pflegt das einfachste Verfahren, um die Existenz einer durch erzeugende Elemente definirten Gruppe nachzuweisen, darin zu bestehen, dass man dieselbe als Theiler einer schon bekannten Gruppe G darstellt, weil dann die beiden obigen Gesetze von selbst erfüllt sind. Für unser Beispiel genügt es die symmetrische Gruppe G aller $\Pi(8)$ Versetzungen von acht verschiedenen Dingen $a, b, c, d, a', b', c', d'$ zu betrachten; benutzt man die bekannte Bezeichnung der Cykeln und setzt

$$(16)\quad \begin{aligned} \alpha &= (dad'a')(cbc'b'), \\ \beta &= (dbd'b')(aca'c'), \\ \gamma &= (dcd'c')(bab'a'), \\ \varepsilon &= (aa')(bb')(cc')(dd'), \end{aligned}$$

so erfüllen die beiden nicht permutabelen Elemente α, β der Gruppe G wirklich die beiden Bedingungen (15), und folglich muss die von ihnen erzeugte Gruppe, welche ein Theiler von G ist, mit unserem System Q der acht verschiedenen Elemente $1, \varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}$ identisch sein.

Diese Gruppe Q, deren Existenz hiermit gesichert ist, verdient den Namen der Quaterniongruppe zunächst wegen der augenscheinlichen Analogie zwischen der Composition der drei Elemente vierten Grades α, β, γ und der Multiplication der drei Hamilton'schen imaginären Einheiten i, j, k; es findet aber, wie ich schon im Februar 1886 erkannt habe, eine noch tiefer liegende Beziehung zwischen der Gruppe Q und Hamilton's Quaternionen statt, von welcher demnächst an einem anderen Orte gehandelt werden soll. Damals habe ich auch schon Normalkörper gebildet, deren Permutationsgruppe mit Q identisch ist; ein einfaches Beispiel, welches unendlich viele Specialfälle umfasst, liefert die Gleichung

$$\omega^2 = r(2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{6}),$$

wo r irgend eine von Null verschiedene rationale Zahl bedeutet; jede Wurzel ω einer solchen Gleichung erzeugt einen Quaternionkörper, d. h. einen Normalkörper achten Grades mit der Gruppe Q, und man kann beweisen, dass auf diese Weise *jeder* Quaternionkörper entsteht, der die Quadratwurzeln aus 2 und 3 enthält.

Dass aber diese Gruppe Q, welche ausserdem schon in ganz anderen Untersuchungen aufgetreten ist, die in der Einleitung angegebene wichtige Bedeutung für alle Hamilton'schen Gruppen besitzt, habe ich erst im Herbste 1895 erkannt, und die Darlegung dieser Bedeutung bildet den ausschliesslichen Gegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Man überzeugt sich zunächst leicht, dass Q keine anderen Theiler als Normaltheiler besitzt. Bezeichnet man der Kürze halber die durch irgend welche Elemente $\varphi, \psi, \chi \ldots$ erzeugte Gruppe mit dem Symbol $[\varphi, \psi, \chi, \ldots]$, so dass z. B. $[\varphi]$ die aus allen Potenzen von φ bestehende cyklische oder reguläre Gruppe oder Periode bedeutet, so hat Q offenbar nur die folgenden sechs Theiler

$$(17) \qquad [1], \ [\varepsilon], \ [\alpha], \ [\beta], \ [\gamma], \ [\alpha, \beta] = Q;$$

dass $[1]$ und Q Normaltheiler von Q sind, ist eine allgemeine Eigenschaft aller Gruppen; dasselbe gilt von $[\varepsilon]$, weil ε mit allen Elementen von Q permutabel ist, und auch z. B. von $[\alpha]$, weil

$$(18) \qquad Q = [\alpha] + [\alpha]\beta$$

und

$$(19) \qquad \beta^{-1}[\alpha]\beta = [\alpha^{-1}] = [\alpha]$$

ist. Also ist Q im Sinne der Einleitung wirklich eine Hamilton'sche Gruppe.

§ 2.

Kennzeichen der Hamilton'schen Gruppen.

Um die allgemeine Form aller Hamilton'schen Gruppen zu finden, ist es zweckmässig, aus ihrer Definition, wie sie in der Einleitung gegeben ist, einfachere charakteristische Kennzeichen abzuleiten, welche in den folgenden Sätzen enthalten sind; dass dieselben auch für die Abel'schen Gruppen gelten, welche also, wenn auch nur vorläufig, als ein specieller Fall der Hamilton'schen Gruppen anzusehen sind, braucht kaum bemerkt zu werden*).

---

*) Man könnte vielleicht beide Arten von Gruppen unter dem gemeinsamen Namen von *Normalgruppen* zusammenfassen.

I. *Die erforderliche und hinreichende Bedingung dafür, dass R eine Hamilton'sche Gruppe ist, besteht darin, dass, wenn φ, ψ irgend welche Elemente von R bedeuten, das Element $\varphi^{-1}\psi\varphi$ eine Potenz von ψ, also in der Periode $[\psi]$ enthalten ist.*

Denn wenn R eine Hamilton'sche (oder Abel'sche) Gruppe ist, so muss $\varphi^{-1}[\psi]\,\varphi = [\psi]$, also $\varphi^{-1}\psi\varphi$ eine Potenz von ψ sein. Umgekehrt, wenn diese Bedingung durch alle Elemente φ, ψ einer Gruppe R erfüllt wird, und S irgend eine in R enthaltene Gruppe bedeutet, so wird, wenn ψ alle Elemente von S durchläuft, $\varphi^{-1}\psi\varphi$ als Potenz von ψ ebenfalls in S enthalten sein; mithin ist die aus den Elementen $\varphi^{-1}\psi\varphi$ bestehende Gruppe $\varphi^{-1}S\varphi$ ein Theiler von S und folglich $= S$, w. z. b. w.

Dieses Kennzeichen lässt sich in einer für unseren Zweck noch bequemeren Form ausdrücken, wenn man das durch die Bedingung

$$\psi\varphi = \varphi\psi\varepsilon \tag{20}$$

definirte Element

$$\varepsilon = (\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi)\,\varphi = \psi^{-1}(\varphi^{-1}\psi\varphi) \tag{21}$$

einführt, welches wir der Kürze halber den *Commutator der Elemente* φ, ψ nennen wollen*); der vorige Satz geht dann, weil

$$[\varphi^{-1}]\,\varphi = [\varphi]\,\varphi = [\varphi] \quad \text{und} \quad \psi^{-1}[\psi] = [\psi]$$

ist, offenbar in den folgenden über:

II. *Die erforderliche und hinreichende Bedingung dafür, dass R eine Hamilton'sche Gruppe ist, besteht darin, dass der Commutator ε von je zwei in R enthaltenen Elementen φ, ψ ein gemeinsames Element ihrer Perioden $[\varphi]$, $[\psi]$ und folglich auch mit allen Elementen der durch φ und ψ erzeugten Gruppe $[\varphi, \psi]$ permutabel ist.*

Die nächsten Folgerungen, welche sich hieraus mit Zuziehung der bekannten, für je zwei Elemente ϱ, σ einer beliebigen Gruppe und für jede ganze rationale Zahl s gültigen Identität

$$\varrho^{-1}\sigma^s\varrho = (\varrho^{-1}\sigma\varrho)^s \tag{22}$$

ergeben, bilden den folgenden Satz:

III. *Ist ε der Commutator der Elemente φ, ψ einer Hamilton'schen Gruppe, so ist*

$$\psi^n\varphi^m = \varphi^m\psi^n\varepsilon^{mn}, \tag{23}$$

$$(\varphi^m\psi^n)^t = \varphi^{mt}\psi^{nt}\varepsilon^{\frac{1}{2}mnt(t-1)}, \tag{24}$$

und die durch φ und ψ erzeugte Gruppe ist

$$[\varphi, \psi] = [\varphi]\,[\psi] = [\psi]\,[\varphi]. \tag{25}$$

---

*) Ohne auf die Bedeutung dieses Begriffes für die allgemeine Gruppentheorie näher einzugehen, will ich nur den Satz erwähnen, dass der grösste in einem Normalkörper von der Gruppe G enthaltene Abel'sche Körper zu derjenigen Gruppe gehört, welche durch alle in G enthaltenen Commutatoren erzeugt wird.

Setzt man ferner

(26) $$\varphi_1 = \varphi^m \psi^n, \qquad \psi_1 = \varphi^r \psi^s,$$

so ist

(27) $$\varepsilon_1 = \varepsilon^{ms - nr}$$

der Commutator der Elemente φ_1, ψ_1.

Wendet man nämlich die Identität (22) auf das Beispiel $\varrho = \varphi$, $\sigma = \psi$, $s = n$ an, so wird $\varrho^{-1}\sigma\varrho = \varphi^{-1}\psi\varphi = \psi\varepsilon$, und weil ψ zufolge II mit ε permutabel ist, so erhält man

$$\varphi^{-1}\psi^n\varphi = (\psi\varepsilon)^n = \psi^n\varepsilon^n,$$

also

$$\psi^{-n}\varphi^{-1}\psi^n = \varepsilon^n\varphi^{-1};$$

setzt man daher in (22) jetzt $\varrho = \psi^n$, $\sigma = \varphi^{-1}$, $s = m$, so wird $\varrho^{-1}\sigma\varrho = \varepsilon^n\varphi^{-1}$, und weil ε^n mit φ^{-1} permutabel ist, so erhält man

$$\psi^{-n}\varphi^{-m}\psi^n = (\varepsilon^n\varphi^{-1})^m = \varepsilon^{mn}\varphi^{-m},$$

also die Gleichung (23), und hieraus folgt leicht durch vollständige Induction der Satz (24); denn wenn derselbe für eine bestimmte ganze rationale Zahl t gilt (wie z. B. für $t = 0$), so folgt durch Multiplication mit $\varphi^m\psi^n$ oder mit dem reciproken Element $\psi^{-n}\varphi^{-m}$ unter Zuziehung von (23), dass er auch für die beiden benachbarten Zahlen $t \pm 1$ gilt. Aus (23) und (26) folgt ferner

$$\varphi_1\psi_1 = \varphi^m(\psi^n\varphi^r)\psi^s = \varphi^{m+r}\psi^{n+s}\varepsilon^{nr},$$
$$\psi_1\varphi_1 = \varphi^r(\psi^s\varphi^m)\psi^n = \varphi^{m+r}\psi^{n+s}\varepsilon^{ms},$$

und da ε Potenz von ψ ist, so sind alle Producte $\varphi_1\psi_1$ von je zwei in dem Complex $[\varphi][\psi]$ enthaltenen Elementen φ_1, ψ_1 in demselben Complex enthalten, woraus (25) folgt; zugleich ergiebt sich aus den beiden vorstehenden Gleichungen auch der Commutator ε_1 in der Form (27), w. z. b. w.

§ 3.

Eigenschaften zweier nicht permutabelen Elemente einer Hamilton'schen Gruppe.

Die zuletzt erhaltenen Resultate sind offenbar nur dann von Interesse, wenn die beiden Elemente φ, ψ *nicht* permutabel sind, was wir im Folgenden annehmen; ihr Commutator ε ist dann verschieden von dem Hauptelement 1 der Hamilton'schen Gruppe R; bedeutet daher e den Grad des Elementes ε und der Periode $[\varepsilon]$, so ist

(28) $$e > 1, \qquad \varepsilon^e = 1.$$

Wählt man nun die Exponenten m, n des Elementes φ_1 in (26) so, dass m, n, e *keinen gemeinsamen Theiler* haben, so kann man die Exponenten r, s des anderen Elementes ψ_1 so bestimmen, dass

$ms - nr \equiv 1 \pmod{e}$ wird; nach (27) folgt hieraus $\varepsilon_1 = \varepsilon$, und da der Commutator ε_1 der Elemente φ_1, ψ_1 nach Satz II eine Potenz von φ_1 ist, so ergiebt sich nach (24) die *Existenz* einer ganzen Zahl t, welche der Bedingung

$$(29) \qquad \varphi^{mt}\psi^{nt}\varepsilon^{\frac{1}{2}mnt(t-1)} = \varepsilon$$

genügt.

Um diesen Existenzsatz für unseren Zweck zu verwerthen, wird es nöthig, die Perioden $[\varphi]$, $[\psi]$ und deren grössten gemeinsamen Theiler D, welcher bekanntlich selbst eine Periode ist, genauer zu betrachten. Da die Periode $[\varepsilon]$ nach Satz II ein gemeinsamer Theiler von $[\varphi]$, $[\psi]$, also auch ein Theiler von D ist, so ist der Grad von D theilbar durch e, also von der Form de. Da ferner jedes Element in D von der Form φ^m und zugleich eine Potenz von ψ, also auch mit ψ permutabel ist, so folgt aus (23), wenn man dort $n = 1$ setzt, dass $\varepsilon^m = 1$, also *m durch e theilbar* sein muss; alle Elemente von D sind daher Potenzen von φ^e, und da offenbar auf dieselbe Weise folgt, dass sie auch Potenzen von ψ^e sein müssen, so ist der grösste gemeinsame Theiler D der Perioden $[\varphi]$, $[\psi]$ zugleich derjenige der Perioden $[\varphi^e]$, $[\psi^e]$; bezeichnet man daher die Grade der letzteren, weil sie durch den von D theilbar sein müssen, mit ade, bde, so sind ade^2, bde^2 die Grade von $[\varphi]$, $[\psi]$, und zufolge (25) ist nach einem bekannten Satze $abde^3$ der Grad von $[\varphi, \psi]$, woraus beiläufig folgt, dass der Grad einer Hamilton'schen Gruppe nicht kleiner als *acht* sein kann. Zugleich ergeben sich folgende Darstellungen unserer Gruppen:

$$(30) \qquad [\varepsilon] = [\varphi^{ade}] = [\psi^{bde}],$$

$$\begin{aligned}(31) \qquad D &= [\varphi^{ae}] = [\psi^{be}] \\ &= [\varepsilon](1 + \varphi^{ae} + \varphi^{2ae} + \cdots + \varphi^{(d-1)ae}) \\ &= [\varepsilon](1 + \psi^{be} + \psi^{2be} + \cdots + \psi^{(d-1)be}),\end{aligned}$$

$$(32) \qquad [\varphi] = D(1 + \varphi + \varphi^2 + \cdots + \varphi^{ae-1}),$$

$$(33) \qquad [\psi] = D(1 + \psi + \psi^2 + \cdots + \psi^{be-1}),$$

$$\begin{aligned}(34) \qquad [\varphi, \psi] &= [\varphi][\psi] = [\psi][\varphi] \\ &= [\varphi](1 + \psi + \psi^2 + \cdots + \psi^{be-1}) \\ &= [\psi](1 + \varphi + \varphi^2 + \cdots + \varphi^{ae-1})\end{aligned}$$

und aus den beiden ersten Darstellungen von D folgt die Existenz von zwei ganzen Zahlen h, k, welche den Bedingungen

$$(35) \qquad \varphi^{ae} = \psi^{bek}, \qquad \psi^{be} = \varphi^{aeh}, \qquad hk \equiv 1 \pmod{de}$$

genügen.

Wir wenden uns nun dazu, den Existenzsatz (29) zur Geltung zu bringen; statt dies in voller Allgemeinheit durchzuführen, ziehen wir es vor, ihn auf zwei specielle Beispiele von Zahlenpaaren m, n anzuwenden, was bequemer und ebenso erfolgreich ist.

Erstes Beispiel. Bedeutet c den grössten gemeinsamen Theiler der beiden Zahlen

(36) $$a = ca', \qquad b = cb',$$

so setzen wir

$$m = -ha', \qquad n = b';$$

dann haben die Zahlen m, n, e zufolge (35), (36) keinen gemeinsamen Theiler, und es giebt daher zufolge (29) eine ganze Zahl t, welche der Bedingung

$$\varphi^{-ha't}\,\psi^{b't}\,\varepsilon^{-\frac{1}{2}ha'b't(t-1)} = \varepsilon$$

genügt. Da ε Potenz von φ ist, so muss $\psi^{b't}$ in D enthalten, also $b't$ zufolge (31) theilbar sein durch $be = b'ce$; mithin wird $t = ceu$, wo u eine ganze Zahl bedeutet, und da nach (35), (36) hieraus

$$\psi^{b't} = \psi^{beu} = \varphi^{aehu} = \varphi^{ha't}$$

folgt, so geht die obige Bedingung für t in

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}ha'b'ceu(ceu-1)} = \varepsilon,$$

also in die Congruenz

$$-\frac{1}{2}ha'b'ceu(ceu-1) \equiv 1 \pmod{e}$$

über. Da unter den Factoren der linken Seite sich auch die Zahl e befindet, so ergiebt sich durch Multiplication mit 2 das Resultat

$$2 \equiv 0 \pmod{e},$$

also zufolge (28)

(37) $$e = 2, \quad \varepsilon^2 = 1,$$

und hierdurch geht die vorstehende Congruenz in

$$ha'b'cu \equiv 1 \pmod{2}$$

über, woraus mit Rücksicht auf (36) auch

(38) $$1 \equiv h \equiv a' \equiv b' \equiv c \equiv a \equiv b \pmod{2}$$

folgt. Die Grade von $[\varphi]$, $[\psi]$ sind $4ad$, $4bd$, und zufolge (30) ist

(39) $$\varepsilon = \varphi^{2ad} = \psi^{2bd}.$$

Der Grad der Gruppe $[\varphi, \psi]$ ist $= 8abd$. —

Zweites Beispiel. Setzen wir

$$m = a(d-h), \quad n = b,$$

so haben die Zahlen m, n, e zufolge (37), (38) keinen gemeinsamen Theiler, und ausserdem ist zufolge (38) das Product

$$mn \equiv d - 1 \pmod{2};$$

es giebt daher zufolge (29) eine ganze Zahl t, welche der Bedingung

$$\varphi^{a(d-h)t}\,\psi^{bt}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}(d-1)t(t-1)} = \varepsilon$$

genügt. Da ε Potenz von φ ist, so muss ψ^{bt} in D enthalten, also bt zufolge (31) theilbar sein durch $be = 2b$; mithin wird $t = 2u$, wo u wieder eine ganze Zahl bedeutet, also $\frac{1}{2}t(t-1) \equiv u \pmod{2}$; mit Rücksicht auf (35), (39) wird zugleich

$$\psi^{bt} = \psi^{2bu} = \varphi^{2ahu} = \varphi^{aht},$$
$$\varphi^{a(d-h)t}\psi^{bt} = \varphi^{adt} = \varphi^{2adu} = \varepsilon^{u},$$

mithin kommt die obige Bedingung für t auf

$$\varepsilon^{du} = \varepsilon$$

zurück, woraus

(40) $$d \equiv 1 \pmod{2}$$

folgt. —

Die in (37), (38), (39), (40) gewonnenen fundamentalen Resultate fassen wir zusammen in den folgenden Satz:

IV. *Die Grade von je zwei nicht permutabelen Elementen* φ, ψ *einer Hamilton'schen Gruppe sind* $\equiv 4 \pmod{8}$; *bezeichnet man dieselben resp. mit* $8r + 4$, $8s + 4$, *so ist der durch* $\psi\varphi = \varphi\psi\varepsilon$ *definirte Commutator*

(41) $$\varepsilon = \varphi^{4r+2} = \psi^{4s+2},$$

also vom Grade zwei.

§ 4.

Allgemeine Form der Hamilton'schen Gruppen.

Mit Hülfe der eben gewonnenen Grundlage gelingt es nun ohne Schwierigkeit, die allgemeine Form aller Hamilton'schen (nicht Abel'schen) Gruppen R zu finden.

Diejenigen Elemente π einer solchen (oder auch jeder anderen) Gruppe R, welche mit jedem Element ω von R permutabel sind, bilden bekanntlich eine Gruppe, weil aus $\pi'\omega = \omega\pi'$ und $\pi''\omega = \omega\pi''$ auch $(\pi'\pi'')\omega = \omega(\pi'\pi'')$ folgt; diese, offenbar Abel'sche Gruppe soll im Folgenden durchweg mit P bezeichnet werden. Da R eine Hamilton'sche, also nicht Abel'sche Gruppe ist, so muss P ein *echter* Theiler von R, d. h. verschieden von R sein, und es giebt mindestens zwei Elemente φ, ψ, welche nicht mit einander permutabel und folglich auch nicht in P enthalten sind. Behalten wir für diese Elemente die Bezeichnungen unseres letzten Satzes IV bei und setzen wir

$$\alpha = \varphi^{2r+1}, \quad \beta = \psi^{2s+1},$$

so ist

$$\alpha^4 = \beta^4 = 1,$$

und für den Commutator ε der Elemente φ, ψ, welcher vom zweiten Grade ist, ergiebt sich

$$\varepsilon = \alpha^2 = \beta^2, \quad \varepsilon^2 = 1;$$

wendet man ferner den Satz (23) auf das Beispiel $m = 2r + 1$, $n = 2s + 1$ an, so folgt

$$\beta\alpha = \alpha\beta\varepsilon,$$

d. h. ε ist auch der Commutator der Elemente α, β, welche folglich nicht mit einander, wohl aber mit ε permutabel sind. Da nun aus der letzten Gleichung auch

$$\beta\alpha\beta = \alpha\beta\varepsilon\beta = \alpha\beta^2\varepsilon = \alpha\varepsilon^2 = \alpha,$$
$$\alpha\beta\alpha = \alpha^2\beta\varepsilon = \varepsilon\beta\varepsilon = \beta\varepsilon^2 = \beta$$

folgt, so ergiebt sich aus dem Vergleiche mit (15) in § 1, dass α, β die erzeugenden Elemente einer *Quaterniongruppe* Q sind. Es gilt daher der folgende Satz:

V. *In jeder Hamilton'schen Gruppe R ist mindestens eine Quaterniongruppe Q als Theiler enthalten.*

Wir untersuchen nun im Folgenden die Beziehungen zwischen den beiden in R enthaltenen Gruppen P, Q, wobei wir für die letztere alle in § 1 benutzten Bezeichnungen beibehalten, und gelangen so zu der folgenden Reihe von Sätzen.

VI. *Der Grad jedes nicht in P enthaltenen Elementes φ von R ist* $\equiv 4$ (mod. 8).

Dies folgt unmittelbar aus IV, weil es mindestens ein mit φ nicht permutabeles Element ψ in R giebt.

VII. *Das Quadrat jedes Elementes ω von R ist in P enthalten.*

Denn wenn ω in P enthalten ist, so gilt dasselbe auch von ω^2, weil P eine Gruppe ist. Wenn aber das Element ω nicht in P enthalten ist, so ist nach VI sein Grad $\equiv 4$ (mod. 8), also der seines Quadrates $\equiv 2$ (mod. 4), woraus nach VI folgt, dass ω^2 in P enthalten ist, w. z. b. w.

VIII. *Jedes Element ω der Gruppe R ist permutabel mit wenigstens einem der drei Elemente α, β, γ der Gruppe Q, und zwar entweder nur mit einem einzigen oder mit allen dreien.*

Ist nämlich ω nicht permutabel mit α, so muss das von α verschiedene Element $\omega^{-1}\alpha\omega = \alpha^{-1}$ sein, weil es bekanntlich denselben Grad 4 wie α hat und ausserdem nach Satz I (in § 2) eine Potenz von α

ist; ebenso muss, wenn dasselbe Element ω auch mit β nicht permutabel ist, $\omega^{-1}\beta\omega = \beta^{-1}$ sein; da nun $\gamma = \alpha\beta$ ist, so folgt hieraus

$$\omega^{-1}\gamma\omega = \omega^{-1}\alpha\beta\omega = \omega^{-1}\alpha\omega \,.\, \omega^{-1}\beta\omega = \alpha^{-1}\beta^{-1} = \gamma,$$

also $\gamma\omega = \omega\gamma$, d. h. ω ist mit wenigstens einem der drei Elemente α, β, γ permutabel. Ist aber ω mit zweien von ihnen, z. B. mit α und mit β permutabel, so ist es auch mit deren Product γ, also mit allen dreien permutabel, w. z. b. w.

IX. *Der Grad eines mit α, β, γ permutabelen Elementes ω kann nicht durch vier theilbar sein, und der Inbegriff aller dieser Elemente ω ist die Gruppe P.*

Den ersten Theil dieses Satzes beweisen wir auf indirectem Wege, indem wir annehmen, der Grad eines mit α, β (also auch mit γ) permutabelen Elementes ω sei theilbar durch vier. Dann giebt es unter den Potenzen von ω, welche alle ebenfalls mit α, β permutabel sind, auch zwei Elemente *vierten* Grades ϱ (und ϱ^{-1}); nach der Fundamentaleigenschaft I der Hamilton'schen Gruppe R ist nun $\beta^{-1}(\varrho\alpha)\beta$ eine Potenz $(\varrho\alpha)^n$ von $\varrho\alpha$; weil aber ϱ permutabel mit β ist, so folgt $\beta^{-1}(\varrho\alpha)\beta = \varrho\beta^{-1}\alpha\beta = \varrho\alpha^{-1}$, und weil ϱ permutabel mit α ist, so folgt $(\varrho\alpha)^n = \varrho^n\alpha^n$; mithin ist $\varrho\alpha^{-1} = \varrho^n\alpha^n$, also $\varrho^{1-n} = \alpha^{1+n}$. Dass dies aber *unmöglich* ist, ergiebt sich, wenn man die vier Fälle $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ durchgeht; im ersten und dritten Falle wäre nämlich $\varrho = \alpha$, was dem Umstande widerspricht, dass β mit ϱ, aber nicht mit α permutabel ist; im zweiten oder vierten Fall wäre $1 = \alpha^2$ oder $\varrho^2 = 1$, während doch α und ϱ vom vierten Grade sind. Unsere obige Annahme führt daher zu einem Widerspruch, und folglich ist der erste Theil des Satzes bewiesen. Es muss daher jedes mit α, β, γ permutabele Element ω in der Gruppe P enthalten sein, weil nach Satz VI der Grad eines jeden, in P nicht enthaltenen Elementes durch vier theilbar ist, und da umgekehrt jedes Element der Gruppe P zufolge ihrer Definition mit α, β, γ permutabel ist, so ergiebt sich auch der zweite Theil des Satzes, w. z. b. w.

X. *Der Inbegriff aller derjenigen Elemente ω, welche nur mit α, nicht mit β, γ permutabel sind, ist der Complex $P\alpha$.*

Der Grad eines solchen Elementes ω, welches nicht mit β permutabel, also auch nicht in der Gruppe P enthalten ist, hat nach Satz IV die Form $8p + 4$, und zufolge (41) wird der Commutator der beiden Elemente ω, β durch die Potenzen

$$\omega^{4p+2} = \beta^2 = \varepsilon = \alpha^2$$

dargestellt; wenn ferner ω mit α, also auch mit α^{-1} permutabel ist, so folgt hieraus

$$(\omega\alpha^{-1})^{4p+2} = \omega^{4p+2}\alpha^{-(4p+2)} = \alpha^2\alpha^{-2} = 1;$$

mithin ist der Grad des Elementes $\omega\alpha^{-1}$ nicht theilbar durch vier, und hieraus folgt nach Satz VI, dass dieses Element in P, also ω in dem Complex $P\alpha$ enthalten ist. Umgekehrt, wenn $\omega = \pi\alpha$ irgend ein Element in $P\alpha$, also π mit allen Elementen permutabel ist, so ist $\omega\alpha = \pi\alpha^2 = \alpha\omega$, ferner $\omega\beta = \pi\alpha\beta$, und

$$\beta\omega = \beta\pi\alpha = \pi\beta\alpha = \pi\alpha\beta\varepsilon = \omega\beta\varepsilon;$$

mithin ist jedes Element ω in $P\alpha$ permutabel mit α, aber nicht permutabel mit β, w. z. b. w.

XI. *Jede Hamilton'sche Gruppe R ist von der Form*

$$R = PQ = P + P\alpha + P\beta + P\gamma, \tag{42}$$

wo Q eine in R enthaltene Quaterniongruppe

$$Q = (1+\varepsilon)(1+\alpha+\beta+\gamma), \tag{43}$$

und P die Abel'sche Gruppe der mit allen Elementen von R permutabelen Elemente bedeutet; diese Gruppe P enthält kein einziges Element vierten Grades, wohl aber das in Q befindliche Element zweiten Grades ε, welches zugleich der Commutator von je zwei nicht permutabelen Elementen der Gruppe R ist.

Denn aus den drei vorhergehenden Sätzen folgt, dass jedes Element ω der Gruppe R in einem und nur in einem der vier Complexe P, $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$ enthalten ist; die Behauptungen über P folgen aus IX und VII, weil $\varepsilon = \alpha^2$ ist. Da endlich die Elemente von P mit allen Elementen von R, ferner die Elemente von $P\alpha$ nach X mit α und folglich auch mit allen Elementen desselben Complexes $P\alpha$ permutabel sind, so gehören zwei nicht permutabele Elemente auch zwei verschiedenen der drei Complexe $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$ an; wählt man nun z. B. aus $P\alpha$, $P\beta$ nach Belieben die beiden Elemente $\varphi' = \pi'\alpha$, $\varphi'' = \pi''\beta$, wo also π', π'' in P enthalten sind, so ergiebt sich

$$\varphi'\varphi'' = \pi'\pi''\alpha\beta, \quad \varphi''\varphi' = \pi'\pi''\beta\alpha = \pi'\pi''\alpha\beta\varepsilon = \varphi'\varphi''\varepsilon,$$

mithin sind diese Elemente φ', φ'' nicht permutabel, und ihr Commutator ist $= \varepsilon$, w. z. b. w.

XII. *Wenn in einer Gruppe G eine Quaterniongruppe Q und eine Abel'sche Gruppe P enthalten ist, deren Elemente mit denen von Q permutabel sind, wenn ferner P das in Q befindliche Element zweiten Grades ε, aber kein einziges Element vierten Grades enthält, so ist das Product PQ eine Hamilton'sche Gruppe R.*

Aus der Permutabilität der Elemente von P mit denen von Q folgt zunächst, dass PQ eine Gruppe R ist; wählt man für Q wieder die bisherige Bezeichnung (43), so ist R von der Form (42), weil die Periode $[\varepsilon] = 1 + \varepsilon$ der grösste gemeinsame Theiler von P, Q ist. Dass R keine Abel'sche Gruppe ist, folgt daraus, dass ihre Elemente α, β nicht permutabel sind. Um zu zeigen, dass R eine Hamilton'sche Gruppe ist, haben wir nach Satz I in § 2 für je zwei Elemente φ, ψ

nachzuweisen, dass $\varphi^{-1}\psi\varphi$ eine Potenz von ψ ist. Wenn nun wenigstens eins dieser beiden Elemente in P enthalten ist, oder wenn sie beide demselben Complex $P\alpha$ oder $P\beta$ oder $P\gamma$ angehören, so sind sie permutabel, und folglich ist $\varphi^{-1}\psi\varphi = \psi$. Wenn aber z. B. $\psi = \pi\alpha$ in $P\alpha$, und $\varphi = \pi'\beta$ in $P\beta$ enthalten ist, so wird

$$\varphi^{-1}\psi\varphi = \beta^{-1}\pi\alpha\beta = \pi\beta^{-1}\alpha\beta = \pi\alpha^{-1};$$

da nun der Grad von π nicht durch vier theilbar ist, weil sonst unter den (in P enthaltenen) Potenzen von π auch zwei Elemente vierten Grades wären, so ist der Grad von π^2 eine ungerade Zahl $2m+1$, also $\pi^{-(4m+1)} = \pi$, mithin $\varphi^{-1}\psi\varphi = \pi\alpha^{-1} = \psi^{-(4m+1)}$, w. z. b. w.

Hiermit ist das am Schlusse der Einleitung ausgesprochene Resultat der Untersuchung in allen Theilen begründet.

Braunschweig, 9. August 1896.

Krause, Dr. **Martin**, Professor an der Königl. Sächs. technischen Hochschule zu Dresden, Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse. 2 Bände. I. Band. [VIII u. 328 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 12.—

Kronecker's, Leopold, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel. 4 Bände. I. Band. Mit L. Kronecker's Bildniss. [IX u. 483 S.] gr. 4. 1895. geh. n. *M.* 28.—

Lie, Sophus, Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von Sophus Lie und Georg Scheffers. In 2 Bänden. I. Band. Mit Figuren im Text. [XII u. 694 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 24.—

v. Lilienthal, Dr. **R.,** a. o. Professor der Mathematik an der kgl. Akademie zu Münster i. W., Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen. [VII u. 114 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 5.—

Markoff, A. A., o. Professor an der Kaiserlichen Universität zu St. Petersburg, o. Mitglied der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, Differenzenrechnung. Autorisierte deutsche Übersetzung von Theophil Friesendorff und Erich Prümm. Mit einem Vorworte von R. Mehmke, o. Prof. an der k. technischen Hochschule zu Stuttgart. [VI u. 194 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 7.—

Matthiessen, Dr. **Ludwig,** ord. Professor an der Universität zu Rostock, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. 2., wohlfeile Ausgabe. [XVI u. 1002 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 8.—

Milinowski, A., Oberlehrer am Gymnasium zu Weissenburg i. E., elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Mit einem Anhange über die gleichseitige Hyperbel. Mit 274 Figuren im Text. 2., wohlfeile Ausgabe. [XII u. 412 S., X u. 135 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 4.—

Minkowski, Dr. **Hermann,** o. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg O./Pr., Geometrie der Zahlen. In zwei Lieferungen. Erste Lieferung. [240 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 8.—

Muth, Dr. **P.,** Grundlagen für die geometrische Anwendung der Invariantentheorie. Mit einem Begleitworte von M. Pasch. [VI u. 132 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 3.—

Netto, Dr. **Eugen,** o. ö. Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen, Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. Erster Band. Mit eingedruckten Holzschnitten. [X u. 388 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 12.—

Neumann, Dr. **C.,** Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig, allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen m. besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen. [XXI u. 292 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 10.—

Plücker's, Julius, gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgeg. von A. Schoenflies u. Fr. Pockels. In 2 Bänden. gr. 8. geh. n. *M.* 50.—

Einzeln:

I. Band: Mathematische Abhandlungen. Hrsg. von A. Schoenflies. Mit einem Bildniss Plückers und 73 in den Text gedruckten Figuren. [XXXVI u. 620 S.] 1895. n. *M.* 20.—

II. Band: Physikalische Abhandlungen. Hrsg. von Fr. Pockels. Mit 78 Textfiguren und 9 Tafeln. [XVIII u. 834 S.] 1896. n. *M.* 30.—

Schlegel, Dr. **V.,** Professor an der Gewerbeschule in Hagen, die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren. [44 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 2.—

Schlesinger, Prof. Dr. **Ludwig,** Privatdozent an der Universität Berlin, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. [XX u. 486 S.] In 2 Bänden. I. Band. gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 16.— [Der II. Band folgt im Januar 1897.]

Schröder, Dr. **Ernst,** o. Prof. der Mathematik an der technischen Hochschule zu Karlsruhe, Algebra und Logik der Relative, der Vorlesungen über die Algebra der Logik dritter Band. I. Abteilung. Mit vielen Textfiguren. [VIII u. 649 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 16.— [Band II, 2 erscheint im Januar 1897, III, 2 im Herbst 1897.]

Stäckel, Dr. **Paul**, Professor an der Universität Königsberg, und Dr. **Friedrich Engel**, Professor an der Universität Leipzig, die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gaufs, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. Mit 145 Figuren im Text und der Nachbildung eines Briefes von Gaufs. [X u. 325 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 9.—

Stahl, Dr. **Hermann**, Professor der Mathematik in Tübingen, Theorie der Abel'schen Functionen. Mit Figuren im Text. [X u. 354 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Staude, Dr. **Otto**, ordentlicher Professor der Mathemetik an der Universität Rostock, die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Mit 49 Figuren im Text. [VIII u. 185 S.] gr. 8. 1896. geh.

Stolz, Dr. **Otto**, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 2 Theilen. II. Theil: Complexe Veränderliche und Functionen. Mit 33 Figuren im Text. [IX u. 338 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 8.—

Sturm, Dr. **Rudolf**, ord. Professor an der Königl. Universität zu Breslau, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. In 3 Theilen. III. (Schlufs-Theil). Die Strahlenkomplexe zweiten Grades. gr. 8. 1896. geh.

Volkmann, **P.**, ord. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Franz Neumann, * 11. September 1798, † 23. Mai 1895. Ein Beitrag zur Geschichte deutscher Wissenschaft. Dem Andenken an den Altmeister der mathematischen Physik gewidmete Blätter unter Benutzung einer Reihe von authentischen Quellen. Mit einem Bildniss Franz Neumann's. [VII u. 68 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 2.40.

——— erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. [XII u. 181 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 6.—

Wassiljef, Prof. **A.**, Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Rede, gehalten bei der feierlichen Versammlung der Kaiserlichen Universität Kasan am 22. Oktober 1893. Aus dem Russischen übersetzt von Professor Friedrich Engel. Sonderabdruck aus dem VII. Hefte der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. [40 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 1.20.

Weiler, Dr. **A.**, in Zürich, neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonometrie. Mit 109 Figuren im Text. 2. wohlfeile Ausgabe. [VII u. 210 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 2.80.

Wirtinger, Dr. **Wilhelm**, a. o. Professor an der Universität in Innsbruck, Untersuchungen über Thetafunktionen. Von der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen mit dem Beneke-Preise für 1895 gekrönt und mit Unterstützung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften daselbst herausgegeben [VIII u. 125 S.] gr. 4. 1895. geh. n. ℳ 9.—

Wislicenus, Dr. **Walter F.**, a. o. Professor an der Universität Strafsburg, astronomische Chronologie. Ein Hülfsbuch für Historiker, Archäologen und Astronomen. [X u. 163 S.] gr. 8. 1895. In Lnw. geb. n. ℳ 5.—

Wüllner, **Adolph**, Lehrbuch der Experimentalphysik. 4 Bände. Erster Band. Allgemeine Physik und Akustik. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit 321 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [X u. 1000 S.] gr. 8. 1895. geh. n. ℳ 12.—

——— Zweiter Band. Die Lehre von der Wärme. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit 131 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XI u. 936 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

[Band III, Magnetismus und Elektrizität, ist unter der Presse, Band IV, Lehre vom Licht, in Vorbereitung.]